УДК 621.9

Храпін С. І., *наук. кер. Ковальова Л.І., к.т.н., доц.*
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, e-mail: ctac0n@ukr.net

МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ДИСКРЕТНО – ЗАДАНОГО ПРОФІЛЮ КОЛОМ

У процесі проектування і виробництва різальних інструментів часто виникає необхідність заміни теоретичних поверхонь різальної частини інструмента поверхнями, які створюються при простих (прямолінійних, обертальних, гвинтових) рухах інструменту другого порядку.

Ця задача зводиться до заміни профілю теоретичної поверхні, заданому множиною точок, технологічною кривою. До таких кривих відносяться: пряма, коло, спіраль Архімеда, евольвента кола, циклоїдальні криві.

У роботі вирішується задача апроксимації множини точок (x_i, y_i), $i=1,2,..N$ теоретичної кривої колом $x^2+y^2-Ax-By+C=0$. Рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ перетвориться до виду $x^2+y^2-Ax-By+C=0$ після замін: $C=a^2+b^2-R^2$. При цьому розглядаються такі варіанти задачі:

- коло точно замінює задані точки (N = 3);
- коло приблизно проходить поблизу заданих N (N> 3) точок;
- коло приблизно проходить поблизу m (m <N) заданих точок, а інші точки лежать на колі і виконуються додаткові умови.

В якості додаткових умов можна взяти такі умови:

- проходження кола через точку (x_k, y_k)

$$x_k^2 + y_k^2 - Ax_k - By_k + C= 0;$$

- заданої дотичної y' у точці (x_k, y_k)

$$2x_k + 2y_ky' - A - By' =0;$$

- проходження кола через точки (x_k, y_k) і (x_l, y_l)

$$x_k^2 + y_k^2 - Ax_k - By_k + C= 0;$$
$$x_l^2 + y_l^2 - Ax_l - By_l + C= 0.$$

Для першого варіанту задача формулюється таким чином: знайти параметри кола (a,b,R), яке проходить через точки (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3). Невідомі параметри A, B, C визначаються із системи трьох лінійних рівнянь:

$$x_1^2 + y_1^2 - Ax_1 - By_1 + C= 0;$$
$$x_2^2 + y_2^2 - Ax_2 - By_2 + C= 0;$$
$$x_3^2 + y_3^2 - Ax_3 - By_3 + C= 0.$$

У другому варіанті задача апроксимації формулюється таким чином: для заданої множини точок (x_i, y_i), $i=1,2,..N$ знайти параметри кола (a,b,R) з умови мінімізації суми квадратів відхилень заданих точок від кола. Відхилення точок від кола представляють функцією $W(A ,B, C)$:

$$W(A, B, C) = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2 - Ax_i - By_i + C)^2 \rightarrow min.$$

Таку задачу вирішують методом найменших квадратів. Умовою існування екстремуму функції є рівність нулю часткових похідних функції $W(A, B, C)$:

$$\frac{\partial W}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial C} = 0.$$

Одержимо систему трьох лінійних рівнянь щодо невідомих A, B, C.

У третьому варіанті для заданої множини точок (x_i, y_i), $i=1,2,..N$ параметри кола (a,b,R) знаходять з умови мінімізації суми квадратів відхилень заданих точок від кола при додаткових умовах, наприклад, проходження кола через точку (x_k, y_k) і задання кута α нахилу дотичної до кола в цій точці.

Задача у такій постановці є задачею на умовний екстремум і записується у вигляді:

$$W(A, B, C) = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2 - Ax_i - By_i + C)^2 \rightarrow min,$$

при обмеженнях:

$$x_k^2 + y_k^2 - Ax_k - By_k + C = 0;$$

$$2x_k + 2y_k y' - A - By' = 0, \text{ де } y' = tg\alpha.$$

Задача на умовний екстремум з обмеженнями у вигляді рівностей може бути вирішена методом невизначених множників Лагранжа. Для цього необхідно для кожної додаткової умови ввести невизначений множник λ і розглянути функцію Лагранжа W_1:

$$W_1(A, B, C, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2 - Ax_i - By_i + C)^2 + \lambda_1(x_k^2 + y_k^2 - Ax_k - By_k + C) + \lambda_2(2x_k + 2y_k y' - A - By') \rightarrow min.$$

За аналогією з попередньою задачею одержимо систему п'яти лінійних рівнянь щодо невідомих $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2$:

$$\frac{\partial W_1}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial W_1}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial W_1}{\partial C} = 0; \quad \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Систему лінійних рівнянь вирішують одним з відомих методів (правило Крамера, метод Гауса, метод оберненої матриці й ін.).

Координати центра кола (a, b) та його радіус R визначаються таким чином:

$$a = \frac{A}{2}; \quad b = \frac{B}{2}; \quad R = \sqrt{a^2 + b^2 - C}.$$

У роботі представлені задачі аппроксимації вирішені у системі MathCAD за допомогою блоку ***Given-Find***.

Список використаних джерел:

1. Численные методы / Н. С Бахвалов, Н. П Жидков и др. – М. Лаб.Баз. Знаний, 2002.
2. Обработка фасонных поверхностей на станках с ЧПУ / П. Р Родин и др. – К. Техніка, 1976.