

УДК 621.9.02-229

Руденко Р.О., Фролов В.К.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, e-mail: rudenko.r.a@gmail.com, v.k.frolov@gmail.com

РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ІНСТРУМЕНТАЛЬНОЇ ОПРАВКИ У ФОРМІ КУБІЧНОГО ПАРАБОЛОЇДА

При розрахунку точності оброблення отвору необхідно визначити лінійну деформацію вільного кінця інструментальної оправки, що виникає під дією радіальної складової сили різання P_y . Для оправки циліндричної форми рішення цієї задачі наведено в класичній літературі з опору матеріалів [1-5]. При виконанні розрахунків для оправки іншої форми, зокрема кубічного параболоїда, автори виявили відсутність в літературних джерелах необхідних залежностей для отримання результату в аналітичній формі.

В роботі вирішена задача отримання аналітичної залежності для розрахунку лінійної деформації інструментальної оправки, що має форму кубічного параболоїда, при навантаженні її силою на вільному кінці. Проведено порівняння величини лінійної деформації оправок циліндричної форми та у формі кубічного параболоїда за умови однакової довжини та об'єму.

Формула для розрахунку об'єму кубічного параболоїда отримується наступним чином.

Визначимо об'єм тіла, яке утворено обертанням навколо осі у кубічної параболі $y = x^3$:

$$V = \pi \int_0^h f^2(y) dy,$$

де $f(y)$ – функція, що описує твірну тіла обертання. Для її визначення необхідно перетворити вихідну функцію вигляду $y = f(x)$ в функцію вигляду $x = f(y)$:

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

Тоді функція $f^2(y)$ матиме вигляд $x^2 = \sqrt[3]{y^2}$, а вираз для визначення об'єму кубічного параболоїда виглядатиме як:

$$V = \pi \int_0^h y^{\frac{2}{3}} dy,$$

де h – висота кубічного параболоїда.

Після інтегрування отримаємо:

$$V = \frac{3}{5} \pi h^{\frac{5}{3}}. \quad (1)$$

Підставивши в останній вираз $h = x^3$, отримаємо:

$$V = \frac{3}{5} \pi x^5.$$

Для визначення об'єму зрізаного кубічного параболоїда виразимо функцію y через менший та більший радіуси: $y_1 = x_1^3$; $y_2 = x_2^3$. Підставивши останні в (1), отримаємо:

$$V = \frac{3}{5} \pi \left[(x_2^3)^{\frac{5}{3}} - (x_1^3)^{\frac{5}{3}} \right],$$

або

$$V = \frac{3}{5} \pi (x_2^5 - x_1^5). \quad (2)$$

Враховуючи, що $x_2 = \sqrt[3]{y + x_1^3}$, вираз (2) можна також представити у вигляді:

$$V = \frac{3}{5} \pi [(y + x_1^3)^{\frac{5}{3}} - x_1^5].$$

Незважаючи на різноманітні степені величин, які входять в цю формулу, розмірність її є розмірністю об'єму (одиниця довжини в третьому степені).

Визначимо об'єм циліндра з радіусом $x_{\text{ц}}$ та висотою y :

$$V_{\text{ц}} = \pi x_{\text{ц}}^2 y. \quad (3)$$

Прирівняємо об'єми зрізаного кубічного параболоїда та циліндра тієї ж довжини, що й параболоїд.

Для цього прирівняємо вирази (2) та (3):

$$\frac{3}{5}\pi(x_2^5 - x_1^5) = \pi x_{ц}^2 y. \quad (4)$$

Вирішимо рівняння відносно $x_{ц}$:

$$x_{ц} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}[x_2^5 - x_1^5]}{y}}.$$

Зважаючи, що $y = y_2 - y_1 = x_2^3 - x_1^3$, $x_1 = \sqrt[3]{x_2^3 - y}$, а $x_2 = \sqrt[3]{y + x_1^3}$, з рівняння (4) можна отримати залежності $x_{ц} = f(x_1)$ або $x_{ц} = f(x_2)$, що пов'язують розміри зрізаного кубічного параболоїда та циліндра тієї ж довжини та об'єму, що й параболоїд:

$$x_{ц} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}[(y + x_1^3)^{\frac{5}{3}} - x_1^5]}{y}};$$

$$x_{ц} = \sqrt{\frac{\frac{3}{5}[x_2^5 - (x_2^3 - y)^{\frac{5}{3}}]}{y}}.$$

Порівняємо лінійні деформації стрижня довжиною L , що навантажений одиничною силою P_y (рис.1).

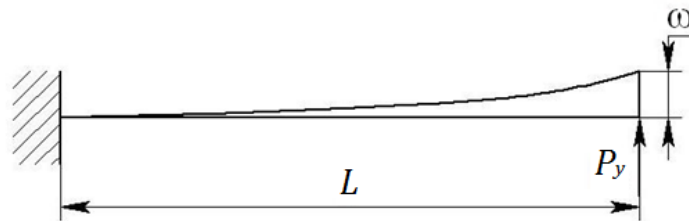


Рис. 1. Схема навантаження стрижня одиничною силою P_y

Як відомо, в загальному вигляді лінійна деформація стрижня дорівнює:

$$\omega = \int_0^L \frac{P_y y^2}{EI} dy, \quad (5)$$

де E – модуль пружності матеріалу стрижня;

I – момент інерції перерізу стрижня.

Для стрижня у формі зрізаного кубічного параболоїда момент інерції перерізу змінний по довжині стрижня і розраховується за формулою:

$$I(y) = \frac{\pi D_{п}^4(y)}{64},$$

де $D_{п}(y)$ – діаметр параболоїда, що залежить від довжини y .

При $y = 0$ діаметр приймає значення $D_{п}(y) = D_{п min}$, а при $y = L$ – значення $D_{п}(y) = D_{п max}$. Зважаючи на те, що максимальний та мінімальний діаметри параболоїда знаходяться у співвідношенні

$$D_{п max} = 2 \sqrt[3]{y + \left(\frac{D_{п min}}{2}\right)^3},$$

можна записати момент інерції перерізу параболоїда у вигляді:

$$I(y) = \frac{\pi \left[2 \sqrt[3]{y + \left(\frac{D_{п min}}{2}\right)^3} \right]^4}{64} = \frac{\pi \left[y + \left(\frac{D_{п min}}{2}\right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}}{4}.$$

Підставивши останній вираз в формулу (5), отримаємо:

$$\omega_{\Pi} = \int_0^L \frac{4Py^2}{\pi E \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy = \frac{4P}{\pi E} \int_0^L \frac{y^2}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy. \quad (6)$$

Інтеграл $\int_0^L \frac{y^2}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy$ вирішуємо за частинами. Для цього робимо заміну змінних:

$$u = y^2, \text{ звідки } du = 2ydy; \quad dv = \frac{dy}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}}, \text{ звідки } v = \int \frac{dy}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} = -\frac{3}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\text{Тоді} \quad \int_0^L \frac{y^2}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy = -y^2 \frac{3}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{6y}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy = -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + \int_0^L \frac{6y}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy.$$

Наступна заміна змінних: $u = 6y$, звідки $du = 6dy$; $dv = \frac{dy}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}}$, звідки $v =$

$$\int \frac{dy}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} = \frac{3 \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \int_0^L \frac{y^2}{\left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{4}{3}}} dy &= -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + 6y \frac{3 \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}}}{2} \Big|_0^L - \int 6y \frac{3 \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}}}{2} dy = \\ &= -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + 9L \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}} - 9 \int \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}} dy = -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + 9L \left[L + \right. \\ &\left. \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{27 \left[y + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}}}{5} \Big|_0^L = -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + 9L \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{27 \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{27 \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^5}{5}. \end{aligned}$$

Враховуючи отриманий результат та формулу (6), лінійну деформацію стрижня у формі зрізаного кубічного параболоїда можна представити у вигляді:

$$\omega_{\Pi} = \frac{4P}{\pi E} \left\{ -\frac{3L^2}{\left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} + 9L \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{27 \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{27 \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^5}{5} \right\}. \quad (7)$$

Після спрощення формули (7) остаточно отримаємо:

$$\omega_{\Pi} = \frac{4P}{\pi E} \left\{ \frac{27 \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^5}{5} - \frac{3(3L \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 - L^2 + 9 \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^6)}{5 \left[L + \left(\frac{D_{\Pi \min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}} \right\}. \quad (8)$$

Для стрижня циліндричної форми лінійна деформація складає:

$$\omega_{\Pi} = \int_0^L \frac{Py^2}{EI} dy = \frac{P}{EI} \int_0^L y^2 dy = \frac{Py^3}{3EI} \Big|_0^L = \frac{PL^3}{3EI}.$$

Зважаючи, що момент інерції

$$I = \frac{\pi D_{\Pi}^4}{64},$$

де $D_{ц}$ – діаметр стрижня, отримаємо:

$$\omega_{ц} = \frac{64PL^3}{3\pi ED_{ц}^4} \quad (9)$$

Діаметр стрижня циліндричної форми тієї ж довжини та об'єму, що й зрізаний кубічний параболоїд, можна виразити наступним чином:

$$D_{ц} = 2 \sqrt{\frac{\frac{3}{5} \left\{ \left[L + \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^5 \right\}}{L}}$$

Тоді, зважаючи на формулу (9), лінійну деформацію стрижня циліндричної форми можна представити як

$$\omega_{ц} = \frac{64PL^3}{3\pi E \left\{ 2 \sqrt{\frac{\frac{3}{5} \left\{ \left[L + \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^5 \right\}}{L}} \right\}^4}$$

Або, остаточно:

$$\omega_{ц} = \frac{100PL^5}{27\pi E \left\{ \left[L + \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^3 \right]^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{D_{п\ min}}{2} \right)^5 \right\}^2} \quad (10)$$

Проведено розрахунки лінійних деформацій оправок за формулами (8) та (10).

При $P = 100$ Н, $L = 300$ мм, $E = 200000$ Н/мм² та $D_{п\ min} = 20$ мм лінійні деформації порівнюваних оправок: $\omega_{п} = 0,439$ мм; $\omega_{ц} = 0,476$ мм. При $P = 100$ Н, $L = 100$ мм, $E = 200000$ Н/мм² та $D_{п\ min} = 10$ мм лінійні деформації порівнюваних оправок: $\omega_{п} = 0,184$ мм; $\omega_{ц} = 0,218$ мм.

Перевага оправки запропонованої форми в першому випадку складає 7,86%, в другому – 15,44%.

За результатами проведеного дослідження можна зробити висновок:

Заміна традиційної циліндричної форми консольної частини інструментальної оправки на форму у вигляді зрізаного кубічного параболоїда підвищить жорсткість оправки без зміни собівартості її виготовлення, що дозволить забезпечити необхідну точність оброблення з меншими витратами або підвищити продуктивність процесу за рахунок інтенсифікації режиму різання. Для дослідження характеру зміни переваги оправки у формі зрізаного кубічного параболоїда над оправкою циліндричної форми необхідно провести широкий спектр розрахунків.

Список використаних джерел

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів [Текст]: підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища шк., 1993. – 656 с.
2. Опір матеріалів: Підручник / В.І. Шваб'юк. – К.: Знання, 2016. – 407 с.
3. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності [Текст]: у 2 ч., 5 кн. Ч.1. кн. 1. Загальні основи курсу: підручник / за ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1994. – 204 с.
4. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності [Текст]: у 2 ч., 5 кн. Ч.1, кн.2. Опір бруса: підручник / В.Г. Піскунов, Ю.М. Федоренко, В.Д. Шевченко [та інші]; під ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1994. – 335 с.
5. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 544 с.